Chapitre 16

Compléments sur les espaces vectoriels

I Propriétés particulières à la dimension finie

1) Extraction de base et base incomplète

a) Rappels : bases et dimension

Définition 1

On appelle base d'un espace vectoriel E toute famille à la fois génératrice et libre.

Proposition 1

On admet que tout espace vectoriel E engendré par un nombre fini de vecteurs admet des bases, et que celles-ci ont toutes le même cardinal. La dimension de E est alors le cardinal commun à ces bases, et on la note $\dim(E)$.

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^n$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)$ où le 1 est la $k$ième composante.
   On peut montrer facilement que $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ et que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$, et c'est la base la plus naturelle : on l'appelle "base canonique" de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{R}^n$ est donc de dimension n.
2. Dans $\mathbb{R}_n[x]$, on peut montrer facilement que $1, x, x^2, \dots, x^n$ est une base, appelée base canonique.
3. Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on pose E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient d'indice (i, j) qui vaut 1.

   Ainsi : $E_{ij} =$

   Alors l'ensemble de ces matrices E_{ij} constitue ainsi une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension .

b) Principe d'extraction de base :

Principe : Etant donnée une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots u_p)$ qu'on sait génératrice d'un espace vectoriel E, on peut toujours extraire de cette famille une base de E. Pour cela, on applique l'algorithme suivant :

1. Si la famille est libre, c'est terminé : on a une base de E.
2. Si la famille est liée, au moins l'un des vecteurs s'exprime en fonction des autres. On en détermine un et on le retire de la famille.
3. On retourne à l'étape 1 avec la famille "réduite" et on répète l'opération...

c) Théorème de la base incomplète

Proposition 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $p < n$ et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors $\mathcal{F}$ peut être completée avec $n - p$ vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$ afin que $e_1, e_2, \dots, e_n$ soit une base de E.

▷ *Preuve* : Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de E. Alors $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Comme $\mathcal{F}$ est constituée de $p < n$ vecteurs, elle n'est pas génératrice et donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) \neq E$.

Ainsi, il existe $b_k \in \mathcal{B}$ tel que $b_k \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, et donc la famille $\mathcal{F} \cup \{b_k\}$ est libre.

On répète l'opération jusqu'à ce que la famille soit génératrice (cela se produira forcément à un moment, puisqu'on prend parmi les n vecteurs de $\mathcal{B}$), et on obtiendra une base.

Comme les bases ont toutes exactement n éléments, cela se produira donc après avoir ajouté $n - p$ éléments...

◁

Méthode : *Compléter une base*

Le théorème de complétion de base est théorique, mais la démonstration donne un algorithme de recherche : il suffit de prendre des vecteurs d'une base existante (et on en aura presque toujours une....), en prenant soin de vérifier que la famille est libre à chaque ajout !

Exemple :
$(1, 2, 0)$ et $(1, 0, 0)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car non colinéaire), mais n'engendre par $\mathbb{R}^3$ (car on sait que $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3).
On va compléter cette base :

2) Utilisation de la dimension

a) Cardinalité et base

Théorème 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. *Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E, alors* $\text{Card}(\mathcal{F}) \geq \dim(E)$.
2. *Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E avec* $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, *alors $\mathcal{F}$ est une base (donc génératrice et libre).*
3. *Si $\mathcal{F}$ est libre, alors* $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
4. *Si $\mathcal{F}$ est libre avec* $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, *alors $\mathcal{F}$ est une base (donc libre et génératrice).*

▷ *Preuve :* (intuitive)

1. D'après la méthode d'extraction de base, de toute famille génératrice on peut extraire une base, c'est à dire une famille contenant moins (ou le même nombre) d'éléments que la famille d'origine. La dimension de E est donc $\leq$ au nombre d'éléments de $\mathcal{F}$.
2. Par l'absurde : supposons $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ avec $\mathcal{F}$ génératrice et $\mathcal{F}$ liée. Alors on peut extraire une base de $\mathcal{F}$ qui a strictement moins d'éléments que $\mathcal{F}$: on obtient une base de E qui a moins d'éléments que la dimension de E. C'est absurde. La famille est donc libre et c'est une base.
3. On peut ajouter des vecteurs à $\mathcal{F}$ pour en faire une base. Or toutes les bases ont $\dim(E)$ éléments, donc $\text{Card}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.
4. Par l'absurde à nouveau : si $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ mais que $\mathcal{F}$ n'engendre pas E, alors on peut compléter $\mathcal{F}$ en une base de E : on obtient une base avec plus que $\dim(E)$ éléments, ce qui est absurde. La famille est donc génératrice et c'est donc une base.

◁

b) Inclusion et dimension

Proposition 3

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

(i) Si $E \subset F$, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.

(ii) Si $E \subset F$ et $\dim(E) = \dim(F)$, *alors $E = F$.*

▷ *Preuve :*

◁

Exemples d'applications
Les deux propositions précédentes sont très pratiques dans de nombreuses situations et fournissent des raccourcis pratiques !
Par exemple :

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$ et $e_3 = (0, -1, 1)$.
  On veut montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Toujours dans $\mathbb{R}^3$, soit $e_4 = (4, 8, -2)$ et $\mathcal{G} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.
  $\mathcal{G}$ est-elle libre ou liée ?

- Soit $E = \{(x, 3x + y, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On montre facilement que $\text{Vect}((1, 3, 0), (0, 1, 1)) = E$ et donc que E est de dimension 2.
  Montrez que $(1, 4, 1)$ et $(2, 0, -6)$ forment aussi une base de E.

3) Rang d'une famille de vecteur

a) Définition

Définition 2

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On appelle rang de $\mathcal{F}$, noté $rg(\mathcal{F})$, la dimension de l'espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \ldots, u_p$.
Autrement dit : $rg(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p))$

Exemple :
Soient $u_1 = (1, 3, 0)$, $u_2 = (-2, 10, -1)$ et $u_3 = (5, -1, 1)$. Déterminons la dimension de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$:

Remarques :

— Le rang d'une famille de vecteurs est le nombre minimal de vecteurs qu'on peut garder dans la famille sans changer l'espace engendré.

— On peut montrer que le rang de la famille de vecteurs est aussi le rang du système obtenu quand on cherche à déterminer si la famille est libre ou liée...

— Attention au vocabulaire ! On a maintenant trois définitions qui tournent autour du même concept : cardinal, dimension, et rang. Il faut prendre garde à ne pas confondre les trois et à être précis sur leur utilisation....

b) Rang, dimension, liberté...

Théorème 2

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un e.v E de dimension n. Alors

1. $rg(\mathcal{F}) \leq p$ *et* $rg(\mathcal{F}) \leq n$.
2. $rg(\mathcal{F}) = p$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est*
3. $rg(\mathcal{F}) = n$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est*
4. $rg(\mathcal{F}) = n = p$ *si et seulement si* $\mathcal{F}$ *est*

▷ *Preuve :* Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

◁

Méthode : *Détermination du rang d'une famille de vecteurs :*

On cherche la dimension de l'espace engendré : c'est la méthode d'extraction de base.

Ainsi, on résout $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Si la famille est libre, le rang de $\mathcal{F}$ est p, sinon, au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. On le retire et on recommence jusqu'à obtention d'une famille libre.

Remarque : le rang du système obtenu sera en fait le rang de la famille, mais il est important de vérifier les liens entre les vecteurs si on veut obtenir une base afin de bien choisir le vecteur à retirer à chaque étape.

II Sommes d'espaces vectoriels

1) Somme de deux sous-espaces vectoriels

a) Généralités

Définition 3

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On appelle somme de F et de G l'ensemble noté $F+G$ défini par

$$F+G=\{u+v; u\in F \text{ et } v\in G\}$$

Autrement dit, dire qu'un vecteur $w\in F+G$ signifie qu'on peut écrire w sous la forme $u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.

Exemple :
Soit $F=\text{Vect}((1,0))$ et $G=\text{Vect}((0,1))$.
Tout vecteur $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ donc $\mathbb{R}^2=F+G$

Propriété 1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E

▷ *Preuve :*

◁

b) Somme directe

Définition 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
On dit que F et G sont en somme directe si et seulement si pour tout vecteur w de $F+G$, il existe un unique $u\in F$ et un unique $v\in G$ tels que $w=u+v$
On note alors $F\oplus G$ au lieu de $F+G$

Proposition 4

F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{O_E\}$

▷ *Preuve :*

◁

Exemple :
Avec $F = \text{Vect}((1,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1))$, on a $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.
En effet :

c) Base et dimension

Théorème 3

Soient F et G deux sous-espace vectoriels d'un espace E de dimension finie.
Soient $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectivement de F et de G.
Alors $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est génératrice de $F + G$.

▷ *Preuve :*

◁

Danger ! *piège classique*
Attention, cette famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ n'est pas forcément libre ! A priori, elle n'est que génératrice, pas nécessairement une base !

Théorème 4 (*Formule de Grassmann*)

Soient F et G deux s.e.v d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

en particulier

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + dim(G)$$

▷ *Preuve :* Il s'agit de partir d'une base de $F \cap G$, et de la compléter d'un côté en une base de F et de l'autre en une base G puis de regrouper le tout en une base de $F+G$. Les éléments de $F \cap G$ apparaissent deux fois donc il faut les retirer une fois, puis il faut prouver que ce qu'on a est bien libre.
Cela ressemble un peu à la preuve de la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et on admet. ◁

2) Espaces supplémentaires

a) Définition

Définition 5

Soit E un espace vectoriel. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont dit supplémentaires dans E si et seulement si $E = F \oplus G$.

Autrement dit : tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exemple : dans $\mathbb{R}^2$,Vect$((1;0))$ et Vect$((0;1))$ sont des s.e.v. supplémentaires.

b) Caractérisation et existence

Théorème 5 (*caractérisation des s.e.v. supplémentaires*)

Soient F et G deux s.e.v. d'un e.v. E de dimension finie.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$
(ii) $F \cap G = \{\vec{O}\}$ *et* $\dim(F) + dim(G) = \dim(E)$
(iii) $E = F + G$ *et* $\dim(F) + dim(G) = \dim(E)$
(iv) La juxtaposition d'une base de F et d'une base de G donne une base de E

Précision : on appelle juxtaposition (ou concaténation) le fait de mettre "bout à bout" les familles.
Par exemple, la juxtaposition de (u_1, u_2), (u_2, u_3) est (u_1, u_2, u_2, u_3) : contrairement à l'union, on ne supprime pas les doublons...
▷ *Preuve :*

◁

Enfin, le théorème de la base incomplète, combiné au théorème ci dessus, permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 6 (*existence de supplémentaires*)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un e.v E de dimension finie.
Alors il existe un s.e.v G tel que $E = F \oplus G$ (et on a $\dim(G) = \dim(E) - dim(F)$).

c) Exemple d'espaces supplémentaires dans l'ensemble des matrices

Définition 6

Soit $n > 2$.

1. *On appelle matrice symétrique toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.*
2. *On appelle matrice symétrique toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = -M$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.*

Montrons que ces ensembles sont des sous-espaces vectoriels :

Montrons maintenant que ces espaces sont en réalité supplémentaires, c'est à dire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
On va procéder par analyse/synthèse :

Analyse :
Prenons $M = S + A$ avec S symétrique et A anti symétrique et essayons de trouver des expressions de S et A :

Synthèse :
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose $S =$ et $A =$.
On a bien $S + A =$ $= M$
Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$. Déterminons $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$

Conclusion : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_n\}$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ et les espaces S_n et A_n sont supplémentaires.

3) Somme de k sous-espaces vectoriels

Il s'agit de généraliser ce qu'on vient de faire. Il y a quelques pièges, mais pas de grandes nouveautés :

a) Généralités

Définition 7

Soit E un espace vectoriel et soient $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.
On note $F_1 + F_2 + \dots + F_k$ ou $\sum_{i=1}^{k} F_i$ l'ensemble défini par

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k = \{u_1 + u_2 + \dots u_k ; (u_1, u_2, \dots, u_k) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k\}$$

De la même manière que pour le cas de deux ensembles, on montre que

Propriété 2

$F_1 + F_2 + \dots + F_k$ est un sous-espace vectoriel de E

et on définit la notion de somme directe :

Définition 8

Soit E un espace vectoriel et soient $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F = F_1 + F_2 + \dots + F_k$ est une somme directe si, pour tout $u \in F$, il existe un unique k-uplet de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k$ tel que
$u = u_1 + u_2 + \dots u_k$
On note alors $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$ ou $\bigoplus_{i=1}^{k} F_i$

Exemple
Dans $\mathbb{R}_3[X]$, posons $F_0 = \text{Vect}(1)$, $F_1 = \text{Vect}(X)$, $F_2 = \text{Vect}(X^2)$ et $F_3 = \text{Vect}(X^3)$.
Alors on a $\mathbb{R}_3[X] = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$

Comme de plus l'écriture d'un polynôme est unique, on a $\mathbb{R}_3[X] = \bigoplus_{i=0}^{3} F_i$

b) Caractérisation des sommes directes

A nouveau, le même genre de preuve que dans le cas de deux sev permet de montrer la proposition suivante :

Théorème 7 (*caractérisation des s.e.v. supplémentaires*)

Soit E un espace vectoriel et soient $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe
(ii) Pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k$,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = O_E \Rightarrow u_1 = 0_E, u_2 = 0_E, \dots u_k = 0_E$$

(iii) $\dim(F_1 + F_2 + \dots + F_k) = \dim(F_1) + dim(F_2) + \dots + dim(F_k)$
(iv) La juxtaposition des bases des F_i est une base de $F_1 + \dots + F_k$

▷ *Preuve* : admis ◁

Danger ! *Piège de l'intersection*

Dans cette partie, nous n'avons pas parlé de $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k$, contrairement au cas de la somme de deux espaces vectoriels...
Et pour cause : il **n'y a pas de propriété analogue**.
Autrement dit : on peut avoir $F_1 \cap F_2 \ldots \cap F_k = \{O_E\}$ sans que la somme soit directe !
En effet, si par exemple seuls F_1 et F_2 sont en somme directe, on aura l'intersection égale à $\{O_E\}$, peu importe les autres s.e.v qu'on ajoute.... Donc toutes les situations sont possibles !

III Coordonnées et représentation matricielle

1) Notation matricielle

a) Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 9

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'un s.e.v E muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p)$. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ (donc $\vec{u} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{e}_k$).

On définit la matrice de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple

Pour $u = (0, 2)$ et $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 0))$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans la base canonique $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Attention :

1. Lorsqu'on travaille de manière matricielle, il faudra systématiquement dire dans quelle base on travaille, sinon, les calculs n'auront aucun sens.
2. Lorsqu'on représente les vecteurs sous forme de matrices, on les représente TOUJOURS avec des colonnes.

b) Combinaison linéaire et représentation matricielle

La représentation matricielle conserve les combinaisons linéaires :

Propriété 3

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un s.e.v. E muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soient λ et μ deux scalaires.
Alors $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}) + \mu\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{v})$

▷ *Preuve* : Il suffit de raisonner sur les coordonnées. On note $e_1, e_2, \ldots e_p$ les vecteurs de $\mathcal{B}$. Si $\vec{u} = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ et $\vec{v} = \sum_{k=1}^{p} y_k e_k$, alors $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + \mu y_k) e_k$ Donc les coordonnées de la combinaison linéaire sont données par la combinaison linéaire des coordonnées... ◁

Conséquence pratique : lorsqu'on manipule des vecteurs dans une base fixée, on identifiera parfois les vecteurs et leurs matrices, ce qui permet de travailler en colonne et de rendre les calculs plus simples.

Exemple :
On veut montrer que $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (-1,2,3)$ et $u_3 = (1,2,4)$ forment une famille libre.
Dans la base canonique, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont les matrices représentant u_1, u_2 et u_3.
Ainsi,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système à résoudre apparaît plus naturellement...

c) Matrice de vecteurs

Définition 10

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2 \ldots, \vec{u}_p\}$ une famille de p vecteurs d'un sev E de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E. On définit la matrice de la famille de vecteur $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$ constituée des matrices colonnes représentant les vecteurs dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (\ \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1) \quad \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_2) \quad \ldots \quad \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\vec{u}_p)\ )$$

Exemple :
$\mathcal{F} = (u_1; u_2; u_3)$ avec $u_1 = (0,1,2)$, $u_2 = (-1,2,3)$ et $u_3 = (1,2,4)$ a pour matrice dans la base canonique :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut montrer aussi que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On peut donc écrire que dans la base $\mathcal{F}$, u_1 a pour représentation matricielle $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (puisque $u_1 = \mathbf{1}u_1 + \mathbf{0}u_2 + \mathbf{0}u_3$), u_2 est représentée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et u_3 par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{F}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 8

Soit E un espace vectoriel. Le rang d'une famille de vecteurs de E est le rang de la matrice de cette famille de vecteurs dans n'importe quelle base de E